PROGRAMA DE NIVEL AVANZADO

Precálculo

Guía de estudio complementaria

PNA CollegeBoard

MISSION STATEMENT

The College Board's mission is to connect students to college success and opportunity. We are a not-for-profit membership organization committed to excellence and equity in education.

About the College Board

The College Board is a mission-driven not-for-profit organization that connects students to college success and opportunity. Founded in 1900, the College Board was created to expand access to higher education. Today, the membership association is made up of more than 6,000 of the world's leading educational institutions and is dedicated to promoting excellence and equity in education. Each year, the College Board helps more than seven million students prepare for a successful transition to college through programs and services in college readiness and college success — including the SAT® and the Advanced Placement Program®. The organization also serves the education community through research and advocacy on behalf of students, educators and schools.

For further information, visit **www.collegeboard.org**.

El College Board Puerto Rico y América Latina (CBPRAL) desarrolla programas y servicios similares a los que se ofrecen en los Estados Unidos, pero especialmente diseñados para poblaciones cuyo vernáculo es el español. Estos programas están dirigidos a sistematizar los procesos de evaluación y admisión universitaria, a fortalecer la orientación académica y personal y a promover la excelencia educativa.

Entre nuestros instrumentos más conocidos se encuentran la PAA™; las Pruebas de Ingreso y Evaluación para el Nivel Secundario (PIENSE™); el Programa de Nivel Avanzado (PNA™); el Inventario CEPA™ (Conoce, Explora, Planifica y Actúa); el English Language Assessment System for Hispanics (ELASH™); y la Prueba de Certificación de Maestros (PCMAS™).

El College Board está comprometido con el principio de igualdad de oportunidades, y sus programas, servicios y política de empleo se rigen por este principio.

El College Board está comprometido con el principio de no discriminación y con combatir el hostigamiento sexual en el reclutamiento de personal, así como en todos los servicios que ofrece y en las actividades que desarrolla.

El College Board basa el empleo en la capacidad personal y la preparación, sin discriminar por razón de raza, color, origen nacional, religión, sexo, edad, condición social, afiliación política, impedimento o cualquier otra característica protegida por la ley.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El curso de Precálculo del Programa de Nivel Avanzado corresponde al curso del mismo nombre en la mayoría de las universidades de Puerto Rico. Pretende cumplir con las ofertas académicas de las instituciones que son necesarias para el estudio de las Ciencias Naturales, la Ingeniería, las Matemáticas y otras disciplinas afines. El curso está estructurado en nueve unidades. Cuatro de las que típicamente se cubren al final del curso son: (1) Trigonometría analítica, (2) Sistemas de ecuaciones e inecuaciones, (3) Fundamentos de geometría analítica y (4) Sucesiones y series. En una encuesta realizada por College Board a mediados del segundo semestre del año académico 2019-2020, los maestros del curso indicaron que habían tenido o estaban teniendo dificultades para culminar con éxito la enseñanza de estos temas.

En esta **Guía de estudio complementaria**, que se pone a la disposición de estudiantes y maestros, se incluye material de apoyo correspondiente a esas unidades. En la parte de **Sistemas de ecuaciones e inecuaciones** se discutirán distintos métodos de solución y aplicaciones de los mencionados sistemas. En la parte de **Fundamentos de geometría analítica** se discutirán los conceptos básicos de las secciones cónicas parábola, elipse e hipérbola. En la unidad de **Sucesiones y series** se repasarán y aplicarán los conceptos de las sucesiones aritméticas y geométricas y las series aritméticas y geométricas.

Al final de la guía hay una prueba de práctica de 25 ejercicios con soluciones detalladas. Las actividades del curso deben propiciar que el estudiante sea el gestor reflexivo de su propio aprendizaje y, en este sentido, se contribuye a sustituir la educación bancaria por la analítica. Si desea más información sobre el resto de los temas, puede acceder a **https://latam.collegeboard.org/pna/** y descargar la **Guía del estudiante** o la **Guía del maestro**.

CONTENIDO

Parte I – Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

I. Objetivos específicos

A. Resolver sistemas de ecuaciones lineales en dos y tres variables usando
   1. Método gráfico
   2. Método de sustitución
   3. Método de eliminación

B. Determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o consistente dependiente y determinar el número de soluciones

C. Definir lo que es una matriz

D. Determinar el tamaño de una matriz

E. Determinar los elementos a_{ij} en una matriz

F. Determinar las condiciones necesarias para que dos matrices sean iguales

G. Realizar operaciones básicas con matrices
   1. Suma y resta
   2. Multiplicación escalar
   3. Multiplicación de matrices

H. Escribir la matriz de coeficientes y la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales

I. Utilizar operaciones fundamentales sobre filas para reducir una matriz a forma escalonada

J. Resolver un sistema de ecuaciones lineales reduciendo la matriz aumentada

K. Definir el determinante de una matriz cuadrada

L. Hallar el determinante de una matriz

M. Resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 usando la regla de Cramer

N. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales usando
   1. Método gráfico
   2. Método de sustitución
   3. Método de eliminación

O. Resolver sistemas de inecuaciones lineales en dos variables por el método gráfico

P. Utilizar el método gráfico para resolver problemas de aplicación modelados por un sistema de inecuaciones lineales en dos variables

II. Revisión de conceptos

Por: Prof. Yuri Rojas Ramírez

Uno de los temas más relevantes del curso de Precálculo es el de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones por sus aplicaciones en prácticamente todas las demás áreas de estudio. La principal destreza para aprender es la de resolver este tipo de sistemas, es decir, cómo hallar todos los puntos (en el plano o en cualquier espacio n-dimensional) que los satisfacen. Por su relativa simplicidad y las múltiples aplicaciones que tienen al Cálculo, a otras matemáticas superiores y a disciplinas afines a las matemáticas, los sistemas de ecuaciones lineales son los de mayor relevancia. El Álgebra Lineal es la rama de las matemáticas que se dedica a estudiar los sistemas lineales y otras estructuras relacionadas. Casi todas las universidades de Puerto Rico tienen cursos de Álgebra Lineal en su currículo y algunas de ellas los ofrecen regularmente.

Aunque el **método gráfico** puede ser utilizado para resolver tanto sistemas de ecuaciones lineales o no lineales como sistemas de inecuaciones lineales, tiene sus limitaciones. Es particularmente útil para resolver sistemas de inecuaciones lineales. Solo funciona si son sistemas de dos variables pues el método consiste en dibujar gráficas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas y hallar los puntos en los que se intersecan las gráficas. Otra desventaja que tiene esta técnica es su imprecisión dado el hecho de que no siempre podemos identificar los puntos de intersección de dos gráficas, aunque sepamos que se intersecan. Otro factor en el que no ayuda el método gráfico es que no siempre podemos hacer gráficas precisas de algunas ecuaciones relativamente complicadas.

Los métodos algebraicos de **sustitución** y de **eliminación** son muy precisos y se usan mayormente para resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Mientras más ecuaciones contenga un sistema lineal, menos recomendable es utilizar estos métodos. Sin embargo, el método de sustitución algunas veces se usa en conjunto con la reducción de matrices.

Los métodos de **reducción de matrices** solo se pueden usar para sistemas lineales. Mientras más ecuaciones o variables haya en el sistema, más útiles resultan estas técnicas. Consisten en utilizar las tres operaciones elementales en las filas de una matriz aumentada hasta conseguir la forma escalonada (método de Gauss) o la forma escalonada reducida (método de Gauss-Jordan). Las **operaciones elementales de fila** son:

I. Intercambiar dos filas de una matriz.

II. Multiplicar una fila por una constante distinta de cero.

III. Sumar el múltiplo de una fila a otra fila.

Otros métodos son el de la **matriz inversa** y la **regla de Cramer**. Estos solamente pueden ser utilizados en sistemas de ecuaciones lineales cuadrados (los que tienen igual número de variables que de ecuaciones) y que sean consistentes e independientes (es decir, que tengan una sola solución). Si no cumplen estos tres requisitos, no es viable su aplicación exitosa; en este caso, la única información útil que proveen es indicar que el sistema es inconsistente o dependiente, pero hay que utilizar otro método, como el de reducción de matrices, para hallar su solución.

Ejemplo: Resuelva el sistema lineal $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 10x + 3y = 6 \end{cases}$.

Método de eliminación

Luego de observar con detenimiento ambas ecuaciones, resulta fácil concluir que el método de eliminación resulta muy apropiado para resolver este sistema. Al sumar ambas ecuaciones, se obtiene una ecuación lineal en una sola variable:

$$12x = 6$$

cuya solución es muy sencilla de obtener: $x = \frac{6}{12}$, es decir, $x = \frac{1}{2}$. Habiendo determinado el valor de x, lo utilizamos en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar el valor de la otra variable. Usaremos la primera:

$$2\left(\frac{1}{2}\right) - 3y = 0$$

$$1 - 3y = 0$$

$$3y = 1$$

$$y = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

Método de la matriz inversa

El método de la **matriz inversa** no es el más indicado en el caso que se presenta, pero supone un buen ejemplo para mostrar cómo funciona y verificar la respuesta anterior. El primer paso es escribir el sistema lineal dado como una ecuación matricial, de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Por razones obvias, la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ se denomina la matriz de coeficientes. La mayor dificultad al utilizar el método de la inversa es precisamente hallar la inversa A^{-1} de esta matriz. Cuando el tamaño de una matriz es 2 × 2, como la que aquí tenemos, podemos utilizar el siguiente resultado:

Para una matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tenemos que

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Si $ad - bc = 0$,

la matriz A no tiene inversa.

En el caso que nos ocupa, se obtiene lo siguiente:

$$A^{-1} = \frac{1}{(2)(3) - (-3)(10)}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6 - (-30)}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6 + 30}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{36} & \frac{3}{36} \\ -\frac{10}{36} & \frac{2}{36} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

Ahora que tenemos la matriz inversa, resolvemos la ecuación matricial despejando por el vector columna que contiene las variables

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

y efectuando la multiplicación correspondiente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{12}\right)(0) + \left(\frac{1}{12}\right)(6) \\ \left(-\frac{5}{18}\right)(0) + \left(\frac{1}{18}\right)(6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \frac{6}{12} \\ 0 + \frac{6}{18} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{12} \\ \frac{6}{18} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Observe que la igualdad anterior implica que $x = \frac{1}{2}$ y que $y = \frac{1}{3}$, confirmando así la solución hallada anteriormente.

Regla de Cramer

Para resolver el sistema lineal dado usando la regla de Cramer, se necesita hallar los valores de tres determinantes, comenzando por el de la matriz de coeficientes A.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-3)(10) = 6 + 30 = 36$$

En los otros dos determinantes se sustituye el vector columna $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, que aparece a la derecha en la ecuación matricial mencionada anteriormente, por la primera y luego por la segunda columna de A, correspondiendo respectivamente a los coeficientes de x y de y.

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (0)(3) - (-3)(6) = 0 + 18 = 18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = (2)(6) - (0)(10) = 12 - 0 = 12$$

Finalmente,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

mientras que

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Estos resultados verifican nuevamente la solución del sistema.

Es importante señalar que, si la matriz de coeficientes no tuviera inversa, entonces $D = 0$ y la regla de Cramer (al igual que el método de la inversa) no se podría utilizar para resolver el sistema.

La siguiente tabla resume los métodos de solución que se pueden utilizar para resolver distintos tipos de sistemas.

Tipo de sistema	Métodos de solución						
	Gráfico	Sustitución	Eliminación	Gauss	Gauss-Jordan	Inversa	Cramer
Sistema de ecuaciones lineales	×	×	×	×	×	×	×
Sistema de ecuaciones no lineales	×	×	×				
Sistema de inecuaciones lineales	×						

Parte II – Secciones cónicas

I. Objetivos específicos

A. Definir geométricamente la parábola

B. Dada la ecuación de una parábola, determinar
   1. el vértice
   2. el foco
   3. la directriz
   4. la gráfica

C. Determinar la ecuación de una parábola
   1. dada la gráfica
   2. que cumpla con unas condiciones dadas

D. Definir geométricamente una elipse

E. Dada la ecuación de una elipse, determinar
   1. los vértices
   2. el eje mayor
   3. el eje menor
   4. los focos
   5. la gráfica

F. Determinar la ecuación de una elipse
   1. dada la gráfica
   2. que cumpla con unas condiciones dadas

G. Definir geométricamente una hipérbola

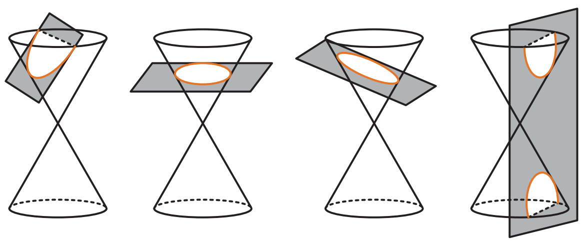
H. Dada la ecuación de una hipérbola, determinar
   1. los vértices
   2. el eje transversal y el eje conjugado
   3. las asíntotas
   4. los focos
   5. la gráfica

I. Determinar la ecuación de una hipérbola
   1. dada la gráfica
   2. que cumpla con unas condiciones dadas

II. Revisión de conceptos y actividades

Por: Prof. Yuri Rojas Ramírez

Las secciones cónicas son curvas planares que se obtienen al cortar con planos inclinados un doble cono circular recto que se extiende infinitamente. Dependiendo de la inclinación del plano cortante se obtienen curvas diferentes; algunas de ellas se muestran a continuación. Hay siete posibles secciones cónicas: un punto, una línea, una pareja de líneas que se cruzan, un círculo, una parábola, una elipse y una hipérbola. Las primeras tres se denominan secciones cónicas degeneradas. El círculo es una sección cónica especial ya que es un caso particular de la elipse. En esta unidad se dará énfasis a las últimas tres, ya que las primeras, incluyendo el círculo, han sido estudiadas previamente.



Toda sección cónica tiene ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B, C, D, E y F son constantes reales y alguna de ellas es distinta de cero. Por ejemplo, si $A = C = 1$ y $B = D = E = F = 0$, la ecuación anterior se convierte en $x^2 + y^2 = 0$, una ecuación que solo satisface el punto $(0, 0)$. Otro ejemplo es cuando $A = C = 7$, $B = D = E = 0$ y $F = -28$, que resulta en $x^2 + y^2 = 4$, la ecuación del círculo de radio 2 centrado en el origen. Un último ejemplo es lo que se obtiene al sustituir $A = -1$, $C = 1$ y asignarle valor de cero (0) a los demás parámetros: $y^2 = x^2$; en este caso se obtiene $y = \pm\sqrt{x^2}$, es decir $y = \pm|x|$, cuya gráfica consiste en las dos rectas $y = x$ y $y = -x$ que se intersecan perpendicularmente en el origen.

Para efectos de la discusión inmediata, dejemos que $B = 0$ en la forma cuadrática general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Una sección cónica descrita por la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ será una:

- parábola cuando exactamente uno de los parámetros A o C sea cero,
- elipse cuando $AC > 0$, es decir, cuando A y C tengan signos iguales,
- hipérbola cuando $AC < 0$, es decir, cuando A y C tengan signos diferentes.

Parábolas

Sean $A = 1$, $B = C = D = F = 0$ y dejemos que $E = -4p$ donde p es cualquier número real distinto de cero. La ecuación resultante es:

$$x^2 = 4py$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola vertical, como la que se muestra en la Figura 1, que tiene

- eje de simetría en el eje de y
- concavidad hacia arriba (si $p > 0$) o hacia abajo (si $p < 0$)
- vértice en el punto $(0, 0)$
- foco en el punto $(0, p)$
- directriz en la recta horizontal $y = -p$
- diámetro focal $|4p|$, que es la medida del lado recto (*o latus rectum)*, el segmento perpendicular al eje de la parábola que pasa por el foco y que va de un punto de la parábola a otro

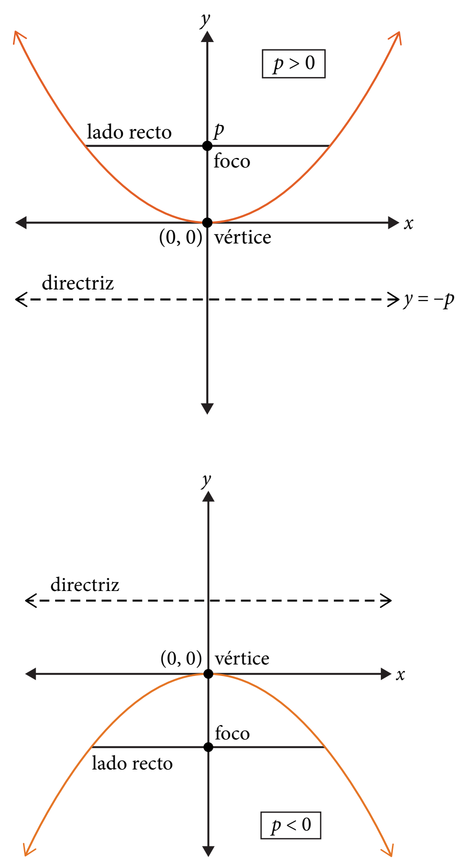


Figura 1

De manera similar, tenemos que la ecuación $y^2 = 4px$ representa una parábola horizontal, como la que se muestra en la Figura 2, que tiene

- eje de simetría en el eje de x
- concavidad hacia la derecha (si $p > 0$) o hacia la izquierda (si $p < 0$)
- vértice en el punto $(0, 0)$
- foco en el punto $(p, 0)$
- directriz en la recta vertical $x = -p$
- diámetro focal $|4p|$

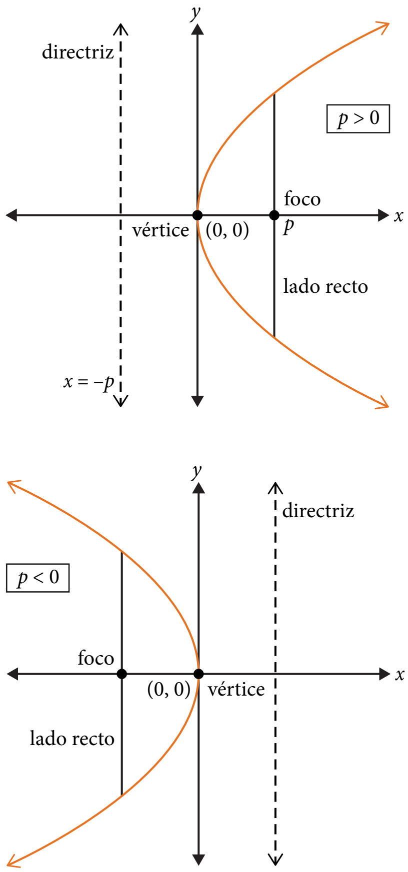


Figura 2

Elipses

Sea $A = \dfrac{1}{a^2}$, $C = \dfrac{1}{b^2}$, $B = D = E = 0$ y dejemos que $F = -1$, donde a y b son cualesquiera números positivos. La ecuación resultante es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si $a > b$, la gráfica de esta ecuación es una elipse horizontal como la que se muestra en la Figura 3, que tiene

- centro en el origen
- eje mayor horizontal, de longitud $2a$, con vértices en los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$
- eje menor vertical, de longitud $2b$, con vértices en los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$
- focos en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$

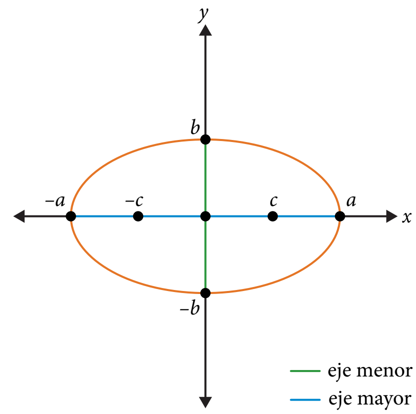


Figura 3

Si, por el contrario, $a < b$, la gráfica de esta ecuación es una elipse vertical como la que se muestra en la Figura 4, que tiene

- centro en el origen
- eje mayor vertical, de longitud $2b$, con vértices en los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$
- eje menor horizontal, de longitud $2a$, con vértices en los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$
- focos en los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$, donde $c^2 = b^2 - a^2$

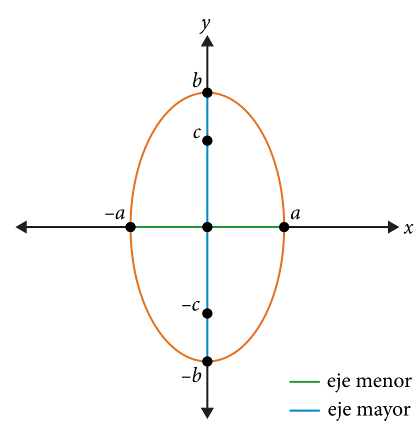


Figura 4

Hipérbolas

Sea $A = \frac{1}{a^2}$, $C = -\frac{1}{b^2}$, $B = D = E = 0$ y dejemos que $F = -1$, donde a y b son cualesquiera números positivos. La ecuación resultante es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La gráfica de esta ecuación es una hipérbola horizontal como la que se muestra en la Figura 5, que tiene

- centro en el origen
- eje transversal o transverso horizontal, de longitud $2a$, con vértices en los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$
- eje conjugado vertical, de longitud $2b$, que pasa por el centro y es perpendicular al eje transversal
- focos en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$
- caja central el rectángulo que tiene vértices (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$ y $(-a, -b)$
- asíntotas en las rectas $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$, que contienen las diagonales de la caja central

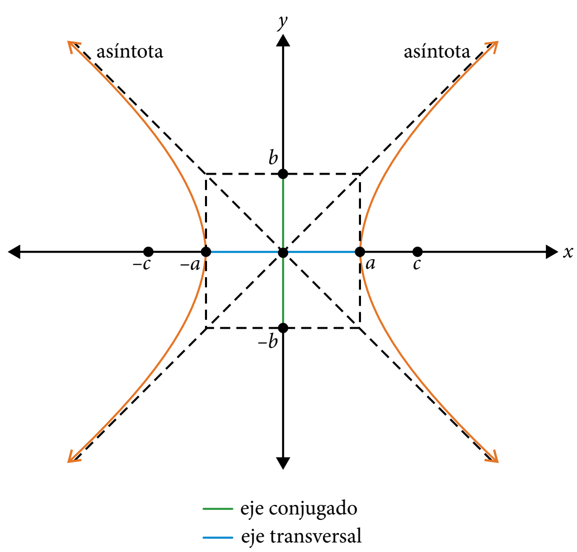


Figura 5

Si $A = -\frac{1}{a^2}$, $C = \frac{1}{b^2}$, $B = D = E = 0$ y dejemos que $F = -1$, donde a y b son cualesquiera números positivos, la ecuación resultante es:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

La gráfica de esta ecuación es una hipérbola vertical, como la que se muestra en la Figura 6, que tiene

- centro en el origen
- eje transversal o transverso vertical, de longitud $2b$, con vértices en los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$
- eje conjugado horizontal, de longitud $2a$, que pasa por el centro y es perpendicular al eje transversal
- focos en los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$
- caja central el rectángulo que tiene vértices (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$ y $(-a, -b)$
- asíntotas en las rectas $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

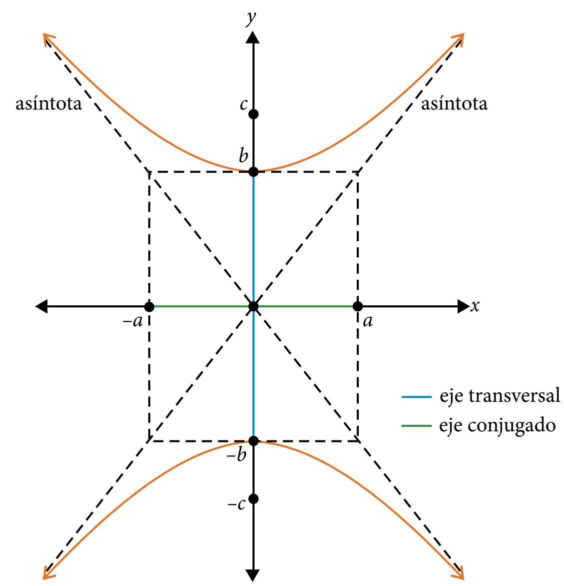


Figura 6

Ejemplo: En un mismo sistema de coordenadas cartesianas con $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$, haga el siguiente dibujo trazando las gráficas de cada una de las siguientes secciones cónicas:

a. cara: $9x^2 + 4y^2 = 144$

b. ojo de la derecha: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

c. ojo de la izquierda: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

d. pupila de la derecha: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

e. pupila de la izquierda: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$

f. labio superior: $x^2 - 4y = 12$; $-2 \le x \le 2$

g. labio inferior: $x^2 - 2y = 8$; $-2 \le x \le 2$

h. oreja de la derecha: $x^2 - 16y^2 = 16$; $4 \le x \le 5$

i. oreja de la izquierda: $x^2 - 16y^2 = 16$; $-5 \le x \le -4$

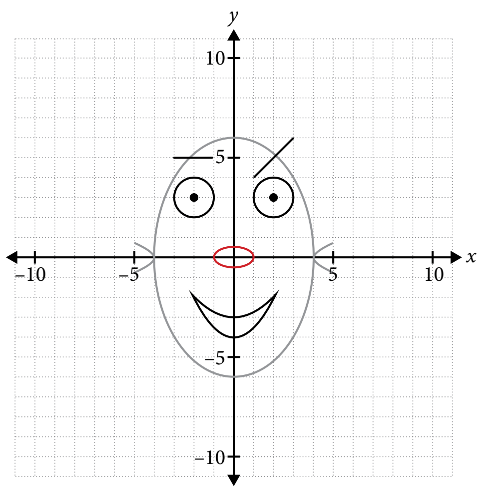
j. ceja de la derecha: $y = x + 3;\ 1 \leq x \leq 3$

k. ceja de la izquierda: $y = 5;\ -3 \leq x \leq -1$

l. nariz: $x^2 + 4y^2 = 1$

m. pelo: BONO

Solución:



Parte III – Sucesiones, series y patrones

I. Objetivos específicos

A. Definir sucesión

B. Utilizar correctamente la notación de sucesión

C. Dada la fórmula de una sucesión, determinar el enésimo término

D. Utilizar la notación de sumatoria para representar la suma de los términos de una sucesión

E. Utilizar las propiedades básicas para evaluar una sumatoria

F. Definir sucesión aritmética

G. Utilizar las propiedades de una sucesión aritmética para

1. determinar el enésimo término de la sucesión
2. determinar la suma de los primeros términos de la sucesión
3. resolver problemas de aplicación

H. Definir sucesión geométrica

I. Utilizar las propiedades de una sucesión geométrica para

1. determinar el enésimo término de la sucesión
2. determinar la suma de los primeros términos de la sucesión
3. resolver problemas de aplicación

II. Revisión de conceptos

Por: Dra. Betty Ramírez Nieves

Se dice que las matemáticas son la ciencia de los patrones. Algunos son sencillos de reconocer, otros son más complejos y abundan en la naturaleza.

¿Sucesión o serie?

¿Cuál es la diferencia entre sucesión, serie y patrón?

Esto es una sucesión finita: 2, 4, 6, 8, 10

Esto es una serie finita: 2 + 4 + 6 + 8 + 10

En efecto, la diferencia está en que:

- la **sucesión** es un conjunto de números u otros elementos (llamados **términos**) ordenados según un patrón o regla de formación.
- la **serie**, sin embargo, es un conjunto de números que siguen un patrón o regla de formación, unidos por una operación, comúnmente una suma. Esto nos permite calcular el valor de la serie. El valor de la serie del ejemplo es 30. En cambio, la sucesión es simplemente una lista de elementos, no se puede calcular su valor.
- el **patrón** o **regla de formación**, es lo que nos permite conocer cómo determinar cada término de la sucesión o de la serie a partir de la posición que ocupa. Las posiciones en una sucesión empiezan en 1 regularmente. Los patrones pueden estar representados por tablas, gráficas, dibujos o reglas algebraicas.

Algunos ejemplos de patrones numéricos son:

- 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … Patrón: cada término después del primero se consigue multiplicando el anterior por 2.
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … Patrón: los dos primeros términos son 1 y luego el tercero se consigue sumando los dos anteriores y así continúa el patrón; el cuarto término es la suma del segundo y el tercero, etc. Este es conocido como el **patrón de Fibonacci**.
- 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, … Patrón: cada término es el cuadrado del número que le da su posición en la lista.

Comportamiendo de las sucesiones

Por su comportamiento, las sucesiones pueden considerarse

- Sucesiones **ascendentes** o **crecientes**: cada nuevo término es mayor al anterior.
- Sucesiones **descendentes** o **decrecientes**: cada nuevo término es menor al anterior.
- Sucesiones **alternadas**: los términos se alternan, ya sea que uno crezca y el siguiente decrezca o que uno sea positivo y el siguiente negativo, o ambos cambios a la vez.

Veamos con más detalle los diferentes tipos de sucesiones.

Definición formal de una sucesión infinita

Una sucesión infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, o sea $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, y al aplicar el patrón o regla de correspondencia a cada uno de los valores en este orden, se consigue cada término de la sucesión.

Ejemplo:

La regla de correspondencia de la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, … está dada por la función $f(n) = n^2$, es decir $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, etc.

Frecuentemente se usa otra notación para representar las sucesiones. Se usan llaves y se representa así: $\{a_n\}$. Cada término sería entonces representado por a_1, a_2, a_3, etc, donde a_k corresponde al valor de la regla de correspondencia en k, y que ocupa la posición k en la sucesión. Por ejemplo, a_{20} en la sucesión anterior sería el término número 20 y su valor sería $20^2 = 400$.

Otro ejemplo de una sucesión en el cual se podría encontrar la fórmula para el n-ésimo (o **enésimo**) término es:

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n
Posición	1	2	3	4	…	n
Valor y patrón	3	5	7	9	…	$2n + 1$

El patrón de formación indica que la posición del término (n) se multiplica por dos y se le suma uno para obtener su valor. El valor del término en la posición nueve será, por tanto, $2(9) + 1 = 19$. La sucesión de los números impares positivos, pertenece a un tipo de sucesión llamada **sucesión aritmética** que se explicará más adelante.

Como se dijo anteriormente, no siempre es fácil encontrar la regla de formación si esta no se provee.

Sucesiones cuyo patrón no se expresa como fórmula matemática

Hay sucesiones que tienen un patrón de formación que no puede redactarse como una fórmula matemática, pero que sí puede observarse y seguirse. Incluso hay algunas sucesiones cuyos elementos no son números.

Ejemplo 1:

Z, X, V, T, R, …

¿Qué elemento sigue?

Se observa que el patrón de formación es: se escribe una letra sí y otra no del abecedario de atrás hacia adelante. Entonces el término que sigue es la letra P.

Ejemplo 2:

12358, **2**358**1**, **3**581**2**, **5**812**3**, …

En este caso no se usa propiamente una fórmula para hallar los términos de la sucesión, se usa más bien un proceso.

Puede observarse cómo el primer número en un término pasa a ser el último número en el siguiente término y todos se corren a la izquierda. Lo mismo para cada nuevo término.

Ejemplo 3:

3, 5, 7, 9, …

Ya se mostró que una de las reglas posibles para 3, 5, 7, 9, … es $a_n = 2n + 1$ y se obtienen así los siguientes términos: 3, 5, 7, 9, 11, 13, …

Al no conocerse la regla o fórmula para el enésimo término, podría ser posible encontrar otra que relacionara estos primeros 4 términos.

¿Qué tal esta: “números impares que NO tengan un 1 en sus dígitos”?:

Tendríamos: 3, 5, 7, 9, 23, 25, …

¡Una sucesión completamente diferente! Se puede observar que tiene los mismos cuatro primeros términos, pero de ahí en adelante no coinciden. Los términos quinto y sexto, por ejemplo, en la primera son 11 y 13, mientras que en la segunda son 23 y 25 respectivamente.

La pregunta es: ¿Se puede encontrar otra regla en la cual coincidan estos cuatro primeros términos? 3, 5, 7, 9, …

Ejemplo 4:

1, 11, 21, 1211, 111221, ...

El patrón de formación de esta sucesión, aunque los términos sean números, tampoco puede redactarse como una fórmula matemática. ¿Cuál sería el siguiente término? ¿Existe un proceso para ello?

El siguiente término sería 312211 o sea tres unos dos doses un uno.

Esta sucesión se conoce como **DESINTEGRACIÓN AUDIOACTIVA**, ya que se forma **DICIENDO** lo que se ve en el término anterior, partiendo, en este caso de “un uno”. Los siguientes términos serán, por tanto:

11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

un uno, dos unos, un dos un uno, un uno un dos dos unos, tres unos dos doses un uno.

Sucesiones con patrón de formación expresado como fórmula

También están las sucesiones para las que sí se puede redactar el patrón de formación como una fórmula matemática, como las siguientes.

Sucesiones aritméticas

También conocidas como polinomiales lineales o de primer orden (tres nombres diferentes para el mismo tipo de sucesión): la diferencia entre un término y el siguiente es un valor constante, como en:

1, 3, 5, 7, …

La diferencia entre 3 y 1 es 2, entre 5 y 3 es 2, etc. De forma **recursiva** se puede encontrar el término siguiente en una sucesión aritmética sumando esta diferencia al término anterior, esto es, se suma 2 a 7 y se obtiene el 9, se suma 2 al 9 y se obtiene 11, y así sucesivamente:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …

Aquí $a_1 = 1$ y la fórmula recursiva para esta sucesión es

$a_n = a_{n-1} + 2$, para $n > 1$

En general, la fórmula recursiva para una sucesión aritmética con término inicial a_1 es

$a_n = a_{n-1} + d$,

donde $n > 1$ y d es la diferencia entre los términos (llamada “diferencia común”).

¿Qué tal si se nos pidiera el término número 62 o el término número 1000 en la sucesión anterior? Si se procede recursivamente y se sigue sumando 2 se hallaría, pero consumiría mucho tiempo. Es mejor encontrar una fórmula explícita para esta sucesión y luego proceder a buscar cualquier término que se necesite.

Fórmula general de una sucesión aritmética

En general, podemos escribir una sucesión aritmética de esta forma:

$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots$

donde a_1 es el primer término, y d es la diferencia entre los términos.

Podemos establecer la regla:

$a_n = a_1 + d(n-1)$

En el ejemplo $1, 3, 5, 7, \ldots, d = 2$, entonces la fórmula explícita sería:

$a_n = 1 + 2(n-1)$

Ejemplo 1:

Use la fórmula anterior para hallar los términos en la posición 62 y en la posición 1000 en la sucesión aritmética:

$1, 3, 5, 7, \ldots$

$a_{62} = 1 + 2(61) = 123$ y $a_{1000} = 1 + 2(999) = 1999$

Ejemplo 2:

¿Cómo se resolvería el encontrar un término particular de una sucesión aritmética si la información que tenemos es la diferencia común d y un término a_n de la sucesión, como por ejemplo $d = 3$ y el término número 12, o sea $a_{12} = 58$? En este caso se desconoce la fórmula explícita de esta sucesión.

La fórmula general para este tipo de sucesión es $a_n = a_1 + d(n-1)$. Entonces si se sustituyen los datos conocidos se tiene:

$a_{12} = a_1 + 3(12 - 1)$, y se obtiene $58 = a_1 + 3(11)$, y entonces $a_1 = 58 - 33 = 25$.

Ya se tienen todos los datos para encontrar una fórmula explícita de la sucesión aritmética:

$a_n = 25 + 3(n-1)$, que simplificaría

$a_n = 25 + 3n - 3 = 22 + 3n$, o sea $a_n = 22 + 3n$

En este ejemplo se requirió usar la fórmula general dos veces. La primera vez se usó hacia atrás desde un término conocido y la segunda vez hacia adelante para llegar a la fórmula explícita. Ahora se puede encontrar cualquier término si se conoce su posición, por ejemplo:

$a_{130} = 22 + 3(130) = 412$.

Ejemplo 3:

¿Es 549 un término de la sucesión que se muestra en el Ejemplo 2?

Se usa la fórmula explícita y se sustituye 549 como el enésimo término:

$a_n = 22 + 3n$

$549 = 22 + 3n$

Resolviendo, se obtiene que $n = \frac{527}{3} \approx 175.67$,

que no es un número natural. Por lo tanto 549 **no** pertenece a esta sucesión. Habrá un término en la posición 175 y otro en la posición 176, pero ninguno entre ellos.

Ejercicios de práctica I

1. Halle la fórmula recursiva de la sucesión aritmética $15, 12, 9, 6, \ldots$
2. Halle la fórmula explícita de la sucesión aritmética $15, 12, 9, 6, \ldots$
3. Halle la fórmula recursiva de la sucesión aritmética $5, 9, 13, 17, 21, \ldots$
4. Halle la fórmula explícita de la sucesión aritmética $5, 9, 13, 17, 21, \ldots$
5. Halle a_{10}, a_{35} y a_{82} para la sucesión del ejercicio 4.
6. ¿Es 327 un término de la sucesión aritmética $8, 13, 18, \ldots$?
7. Halle la fórmula explícita para la sucesión aritmética con $a_7 = 31$ y $a_{25} = 103$.

Sucesiones polinomiales cuadráticas o de segundo orden

En el caso de las **sucesiones cuadráticas**, la **segunda diferencia** (es decir, la diferencia de las diferencias) entre un término y el siguiente es un valor constante, como en el caso siguiente:

$1, 4, 9, 16, \ldots$

Término	1		4		9		16		25…
Primera diferencia		3		5		7		9…	
Segunda diferencia			2		2		2 …		

Puede observarse que, para llegar de un valor al siguiente, se le suma un número que también va creciendo. Si se calcula la segunda diferencia, se observa que ese número ya es constante: 2. Cuando la segunda diferencia es constante, se trata de una sucesión de segundo grado.

Se traduce, en este caso, en un patrón de formación según el cual la posición del término debe elevarse al cuadrado, o sea

$f(n) = n^2$. Los patrones de formación de sucesiones cuadráticas pueden ser más complejos que este.

También hay sucesiones de orden superior a dos. En las de orden tres, la tercera diferencia entre un término y el siguiente es un valor constante y así sucesivamente.

Sucesiones geométricas

En una **sucesión geométrica** la **razón común** entre un término y el siguiente es un valor constante, como en el siguiente caso:

2, 6, 18, 54, …

Aquí se puede observar que, para llegar de un valor al siguiente, se multiplica por tres el primer valor, partiendo del 2. Visto de otra manera, al dividir cada término por el término anterior a él se obtiene un valor constante, 3. En este caso se traduce en un patrón de formación según el cual su **fórmula recursiva** sería:

$a_n = a_{n-1} \cdot r$, para $n > 1$.

En este caso particular la razón común (r) es 3 y la fórmula recursiva sería:

$a_n = a_{n-1} \cdot 3$, para $n > 1$.

Una vez se sabe la razón común r, se puede escribir la forma recursiva de la sucesión geométrica y así podríamos encontrar los siguientes términos a partir del anterior.

2, 6, 18, 54, 162, 486, …

¿Qué tal si se nos pidiera el término número 50 en la sucesión anterior? Si se procede recursivamente y se sigue multiplicando por 3 se hallaría, pero consumiría mucho tiempo. Es mejor encontrar una fórmula explícita para esta sucesión y luego proceder a buscar cualquier término que se necesite.

Si a_1 es el primer término y r es la razón común de una sucesión geométrica $\{a_n\}$, entonces el enésimo término de la sucesión está dado por la siguiente **fórmula general** de una sucesión geométrica:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

En el caso anterior:

2, 6, 18, 54, 162, …

el primer término de la sucesión es 2 y la razón común es 3. Esta es información suficiente para hallar la **fórmula explícita** de la sucesión a partir de la fórmula general.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_n = 2 \cdot (3)^{n-1}$

Nota: Aquí hay que tener sumo cuidado y respetar el orden de operaciones. No se debe multiplicar por 2 el 3. Primero hay que elevar la base 3 al exponente indicado y luego multiplicar por 2.

Ejemplo 1:

Halle el décimo término, o sea a_{10}, en la sucesión geométrica 2, 6, 18, 54, 162, … .

Se usa la fórmula explícita que se halló en la sección anterior:

$a_n = 2 \cdot (3)^{n-1}$

y luego se sustituye:

$a_n = 2 \cdot (3)^{n-1}$

$a_{10} = 2 \cdot (3)^{10-1}$

$a_{10} = 2 \cdot (3)^9$

$a_{10} = 2 \cdot (19{,}683) = 39{,}366$

Note que fue mucho más sencillo usar la fórmula explícita que ir multiplicando hasta llegar al término deseado.

Ejemplo 2:

Halle una fórmula explícita de una sucesión geométrica si se sabe que $r = 2$ y $a_{13} = 28{,}672$.
La fórmula exige saber el primer término y la razón común. Se tiene r, pero no a_1. Sin embargo, se tiene información suficiente para hallarlo.

Se sabe que cuando $n = 13$, entonces $a_{13} = 28{,}672$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$28{,}672 = a_1 \cdot (2)^{13-1}$

$28{,}672 = a_1 \cdot (2)^{12}$

$28{,}672 = a_1 \cdot 4{,}096$

Al simplificar la ecuación, se puede hallar a_1:

$a_1 = \dfrac{28{,}672}{4{,}096} = 7$

Entonces, la fórmula explícita es:

$a_n = 7 \cdot (2)^{n-1}$

En este ejemplo se requirió usar la fórmula general dos veces. La primera vez se usó hacia atrás desde un término conocido y la segunda vez hacia adelante para llegar a la fórmula explícita. Ahora se puede encontrar cualquier término si se conoce su posición.

Ejemplo 3:

Halle una fórmula explícita de la sucesión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_2 = \frac{4}{3}$.

En este caso no se conoce la razón r, pero como los términos dados son consecutivos, r se puede hallar fácilmente dividiendo:

$$r = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$$

Ahora, se sustituyen en la fórmula explícita los valores de a_1 y r:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}$$

Cuando los términos no son consecutivos se complica un poco este tipo de problema.

Ejemplo 4:

Halle el término 9 en la sucesión geométrica cuyos términos a_2 y a_5 son 1 y $\frac{1}{27}$ respectivamente.

En este caso los términos de la sucesión no son consecutivos.

Al usar la fórmula general, se sustituyen los datos conocidos y se obtiene un sistema de dos ecuaciones no lineales en las dos variables a_1 y r.

$1 = a_1 \cdot r^1$

$\frac{1}{27} = a_1 \cdot r^4$

Si se despeja por a_1 en ambas ecuaciones, entonces:

$a_1 = \frac{1}{r}$

$a_1 = \frac{1}{27r^4}$

Igualando $\frac{1}{r} = \frac{1}{27r^4}$ se obtiene $r^3 = \frac{1}{27}$, o sea $r = \frac{1}{3}$.

Como $r = \frac{1}{3}$, entonces de la primera ecuación se obtiene que $a_1 = 3$.

Entonces la fórmula explícita sería:

$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

El término número 9 es:

$$a_9 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1}{2{,}187}$$

Ejercicios de práctica II

1. Halle una fórmula recursiva para la sucesión geométrica 0.4, 0.04, 0.004, 0.0004, …
2. Halle una fórmula explícita para la sucesión geométrica 0.4, 0.04, 0.004, 0.0004, …
3. Halle una fórmula recursiva para la sucesión geométrica 5, 10, 20, 40, …
4. Halle una fórmula explícita para la sucesión geométrica 5, 10, 20, 40, …
5. Halle los valores de a_6, a_9 y a_{12} para la sucesión del ejercicio 4.
6. Halle la fórmula explícita para la sucesión geométrica si $a_1 = 9$ y $a_2 = 18$.

Ejercicios de práctica III

Identifique cada sucesión como aritmética o geométrica. Si fuera aritmética determine el valor de d y si fuera geométrica determine el valor de r.

1. 8, 13, 18, 23, ...
2. 2, 4, 8, 16, ...
3. 729, 243, 81, 27, ...
4. −7, −2, 3, 8, ...
5. 12, 24, 36, 48, 60, ...

Ejemplos de aplicaciones - Sucesiones

Las sucesiones y las series, ya sean aritméticas o geométricas, se pueden aplicar a situaciones que quizás no se piensa que están relacionadas con estas.

Ejemplo 1:

Un teatro tiene 20 sillas en la primera fila, 24 en la segunda, 28 en la tercera y así sucesivamente siguiendo este patrón. El teatro tiene 40 filas de asientos. ¿Cuántas sillas hay en este teatro?

En este caso podríamos representar este patrón como:

fila 1, fila 2, fila 3, fila 4, … , fila 40

20, 24, 28, 30, … , ?

Este patrón va a continuar hasta la fila 40.

Es una sucesión aritmética porque el patrón requiere sumar una cantidad d constante a un término para hallar el próximo, o sea $a_n = d + a_{n-1}$. Es fácil constatar que $d = 4$. Para poder contestar la pregunta se requeriría hallar los 40 términos y sumarlos. Esto constituiría lo que se conoce como la **suma aritmética**:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{39} + a_{40}$

Esto sería muy tedioso, aunque sencillo. Afortunadamente existe una fórmula para hallar la suma de los primeros n términos de la sucesión aritmética y es la siguiente:

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

donde S_n es la suma de los primeros n términos de la sucesión, a_1 el primero y a_n el último. Si se usa la fórmula solo se necesita saber n, a_1 y a_{40}: $n = 40$ (el total de las filas del teatro), $a_1 = 20$ (el número de asientos en la primera fila); el valor a_{40} (el número de asientos en la última fila) hay que encontrarlo.

Para encontrar a_{40} se necesita la fórmula explícita de la sucesión y sustituir $n = 40$.

$a_n = a_1 + d(n - 1)$

$a_{40} = 20 + 4(39) = 20 + 156 = 176$

Se usa la fórmula de la suma de asientos en las 40 filas y se obtiene:

$$S_{40} = 40\left(\frac{20+176}{2}\right) = 40\left(\frac{196}{2}\right) = 20(196) = 3{,}920 \text{ asientos}$$

Ejemplo 2:

Si guardáramos 1 centavo el primer día del mes de mayo, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día y así sucesivamente siguiendo el patrón de esta sucesión geométrica, ¿cuánto sería el total ahorrado al final del mes, o sea el día 31 de mayo?

La sucesión geométrica sería:

1, 2, 4, 8, 16, …

cuya razón común es $r = 2$.

El problema consiste en encontrar la suma total de los ahorros al final de los 31 días. Se necesitan los 31 términos para poder sumarlos. Cuando se suman los primeros n términos de una sucesión geométrica se usa la fórmula siguiente:

$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$, donde a_1 es el primer término y r es la razón común.

Se necesitan los valores de n, a_1 y r. Se sabe que $n = 31$, $a_1 = .01$ (1 centavo en decimal) y $r = 2$.

$$S_{31} = .01\left(\frac{1-2^{31}}{1-2}\right)$$

$$S_{31} = .01\left(\frac{1-2{,}147{,}483{,}648}{-1}\right)$$

$$S_{31} = .01(2{,}147{,}483{,}647)$$

$$S_{31} = 21{,}474{,}836.47$$

¡Se podrían ahorrar casi 21.5 millones de dólares en 31 días!

Sería interesante que usted verifique en una calculadora solo la cantidad que tendría que guardar, digamos el día 15, para que entienda que este comportamiento exponencial crece rápidamente y es seguro que ya no podríamos seguir ahorrando a esta velocidad.

Ejercicios de práctica IV

1. Cada hora, el reloj de mi casa toca el número de campanadas que corresponde a la hora, por ejemplo, a las 4:00, toca 4 campanadas. ¿Cuántas campanadas en total toca en un día?
2. Una compañía está ofreciendo un empleo cuyo salario en el primer año es de $30,000. Cada año se aumenta el salario en un 5 %. Halle la cantidad de dinero que se puede ganar en una carrera de 40 años en este empleo si sigue este patrón.

Solución: Ejercicios de Práctica

Práctica I

1. $a_n = a_{n-1} - 3$, para $n > 1$
2. $a_n = 15 + (-3)(n - 1) = -3n + 18$
3. $a_n = a_{n-1} + 4$, para $n > 1$
4. $a_n = 5 + 4(n - 1) = 4n + 1$
5. $a_{10} = 41$; $a_{35} = 141$; $a_{82} = 329$
6. No, porque la sucesión tiene fórmula $a_n = 8 + 5(n - 1) = 5n + 3$. Si 327 fuera parte de esta sucesión entonces sería cierto que $5n + 3 = 327$, para un entero n, pero $n = \frac{324}{5} = 64.8$, el cual no es entero.
7. Si $a_7 = 31$ y $a_{25} = 103$, entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

   $$\begin{cases} 31 = a_1 + 6d \\ 103 = a_1 + 24d \end{cases}$$

   Si resolvemos este sistema de ecuaciones:

   $31 - 6d = 103 - 24d$

   $18d = 72$

   $d = 4$ y $a_1 = 7$

   La fórmula es: $a_n = 7 + 4(n - 1) = 4n + 3$

Práctica II

1. $a_n = a_{n-1}(0.1)$, si $n > 1$; $a_1 = 0.4$
2. $a_n = 0.4(0.1)^{n-1}$
3. $a_n = a_{n-1}(2)$, si $n > 1$; $a_1 = 5$
4. $a_n = 5(2)^{n-1}$
5. $a_6 = 5(2)^5 = 160$; $a_9 = 5(2)^8 = 1{,}280$; $a_{12} = 5(2)^{11} = 10{,}240$
6. Si $a_1 = 9$ y $a_2 = 18$ entonces $r = 2$. Entonces se tiene a_1 y r, con estos datos se obtiene la fórmula: $a_n = 9(2)^{n-1}$

Práctica III

1. Aritmética; $d = 5$
2. Geométrica; $r = 2$
3. Geométrica; $r = \frac{1}{3}$
4. Aritmética; $d = 5$
5. Aritmética; $d = 12$

Práctica IV

1. Si el reloj toca las campanadas que corresponden a la hora exacta, entonces tocará las campanadas siguiendo esta sucesión aritmética: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 12

   La suma de la serie correspondiente con $a_1 = 1$, $d = 1$ y $n = 12$ es:

   $$S_{12} = 12\left(\frac{1+12}{2}\right) = 6(13) = 78$$

   Pero el reloj en un día de 24 horas repite la sucesión 2 veces, por lo tanto, el resultado sería 156 campanadas.
2. En este caso se forma una sucesión geométrica con $a_1 = 30{,}000$; $r = 1.05$ y $n = 40$.
   30,000, 30,000(1.05), 30,000 $(1.05)^2$, …
   La suma de estos salarios por 40 años sería:

   $$S_{40} = 30{,}000\left(\frac{1-1.05^{40}}{1-1.05}\right) \approx \$3{,}623{,}993.23.$$

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

NOTA

Las figuras que acompañan algunos de los problemas en esta prueba se ofrecen para proveerle información útil para resolverlos. Se han trazado con la mayor exactitud posible EXCEPTO cuando se especifica que la figura no está a escala. Todas las figuras son planas, a menos que se indique lo contrario.

INSTRUCCIONES

En cada uno de los siguientes ejercicios, indique la respuesta correcta oscureciendo el espacio de la letra que le corresponda en la hoja de respuestas.

1

El primer término de una sucesión aritmética es 5 y la diferencia común es 3. Escriba los primeros seis términos de la sucesión.

A) 5, 8, 11, 14, 17, 20

B) 5, 8, 13, 21, 34, 55

C) 5, 2, –1, –4, –7, –10

D) 5, 11, 8, 14, 20, 17

E) 8, 5, 2, –1, –4, –7

Solución:

En este ejercicio nos damos a la tarea de hallar los primeros seis términos de una sucesión. Ya tenemos el primero; por lo tanto, se usa la definición de una sucesión aritmética para hallar los próximos. Una sucesión (o progresión) aritmética $\{a_n\}$ es aquella en que la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos es constante. Esta diferencia común, d, está dada por $d = a_n - a_{n-1}$, para $n > 1$. En este ejercicio, $a_1 = 5$ y $d = 3$. Para hallar el segundo término, podemos usar la fórmula anterior con $n = 2$:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

$$d = a_2 - a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_2 = 5 + 3$$

$$a_2 = 8$$

Podemos notar que el término a_2 se obtuvo sumándole 3 (la diferencia común) al término a_1. De la fórmula $d = a_n - a_{n-1}$ obtenemos que $a_n = a_{n-1} + d$ y, en general, para $n > 1$, los términos se obtienen sumándole 3 al término anterior.

$$a_3 = a_2 + d = 8 + 3 = 11$$
$$a_4 = a_3 + d = 11 + 3 = 14$$
$$a_5 = a_4 + d = 14 + 3 = 17$$
$$a_6 = a_5 + d = 17 + 3 = 20$$

La opción correcta es la (A).

2

La madre de Luisito le regaló \$12 cuando él terminó el primer grado. Cada año que finaliza un grado le regala \$8 más que en el grado anterior. Determine cuántos dólares recibirá Luisito de parte de su madre cuando se gradúe de cuarto año de escuela superior.

A) 100

B) 108

C) 134

D) 140

E) 148

Solución:

Sea a_n la cantidad de dinero, en dólares, que la madre de Luisito le regaló cuando terminó el enésimo grado. Sabemos que $a_1 = 12$. Dado que luego de terminar cada grado, ella le regala \$8 más que en el grado anterior, se genera una sucesión aritmética cuya diferencia común es $d = 8$. Para hallar cuántos dólares recibirá Luisito cuando se gradúe de duodécimo grado, es decir cuarto año de escuela superior, debemos determinar a_{12}.

Para una sucesión aritmética $\{a_n\}$, se sabe que, en general,

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Al sustituir en esta fórmula los valores

$n = 12$ (representando el duodécimo grado)
$a_1 = 12$ (los \$12 que obtiene inicialmente de regalo)
$d = 8$ (los \$8 adicionales que recibe Luisito con respecto al grado anterior)

se obtiene:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_{12} &= 12 + (12 - 1)(8) \\ a_{12} &= 12 + (11)(8) \\ a_{12} &= 12 + 88 \\ a_{12} &= 100 \end{aligned}$$

La opción correcta es la (A).

3

Si cada mes usted pudiera ahorrar el doble de lo que ahorró el mes anterior y comenzara con $10, ¿cuánto le toca ahorrar en el noveno mes?

A) $90

B) $160

C) $2,560

D) $5,110

E) $5,120

Solución:

Sea a_n la cantidad de dinero, en dólares, que usted tiene ahorrado al finalizar el mes número n. Sabemos que $a_1 = 10$. Dado que cada mes usted ahorra el doble de lo que ahorró el mes anterior, se genera la siguiente sucesión geométrica:

$$a_1 = 10$$
$$a_2 = a_1 \times 2 = 10 \times 2 = 20$$
$$a_3 = a_2 \times 2 = (10 \times 2) \times 2 = 10 \times 2^2 = 40$$
$$a_4 = a_3 \times 2 = (10 \times 2^2) \times 2 = 10 \times 2^3 = 80$$
$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$
$$\vdots$$

Una sucesión geométrica es aquella en que el cociente de dos términos consecutivos es constante; a este cociente se le denomina la razón común, denotada por r. Si $\{a_n\}$ es una sucesión geométrica, entonces, para $n > 1$,

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Para hallar el término número n dados el primer término (a_1) y la razón (r), podemos usar la fórmula:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Para hallar la cantidad ahorrada, en dólares, luego de 9 meses debemos determinar a_9, dado que $a_1 = 10$ y $r = 2$:

$$a_9 = 10(2)^8$$
$$a_9 = 10(256)$$
$$a_9 = 2,560$$

La opción correcta es la (C).

4

El quinto término de la sucesión geométrica con razón común $r = \ln 2$ y primer término $a_1 = 2$ es

A) $2 \ln 8$

B) $(\ln 4)(\ln 2)^3$

C) $8 \ln 2$

D) $2(\ln 2)^5$

E) $10 \ln 2$

Solución:

Para una sucesión geométrica $\{a_n\}$ con primer término a_1 y razón común r se sabe que el enésimo término está dado por:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Al sustituir $n = 5$ y los valores indicados en el ejercicio se obtiene:

$$a_5 = 2(\ln 2)^4$$

Dado que ninguna de las alternativas contiene esta expresión, usamos distintas reglas para hallar una que sea equivalente:

$$a_5 = 2(\ln 2)(\ln 2)^3$$

(regla del producto para exponentes: $b^4 = b \cdot b^3$)

$$a_5 = (\ln(2^2))(\ln 2)^3$$

(ley de potencias para logaritmos: $\ln(b^n) = n \cdot \ln(b)$)

$$a_5 = (\ln 4)(\ln 2)^3$$

La opción correcta es la (B).

5

En la progresión geométrica con $a_1 = 25$, $r = \frac{1}{5}$ y $a_n = \frac{1}{5^{12}}$, halle el valor de n.

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15

Solución:

Para una progresión o sucesión geométrica $\{a_n\}$ con primer término a_1 y razón común r, se sabe que el enésimo término está dado por:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Al sustituir los valores indicados, lo que resulta es una ecuación exponencial en la variable n:

$$\frac{1}{5^{12}} = 25\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Para hallar el valor de n, primero expresemos varias de las cantidades como potencias de la base 5, y así poder usar las reglas de exponentes para simplificar la expresión y resolver la ecuación:

$$5^{-12} = \left(5^2\right)\left(5^{-1}\right)^{n-1}$$
$$5^{-12} = \left(5^2\right)\left(5\right)^{-(n-1)}$$
$$5^{-12} = \left(5^2\right)\left(5\right)^{-n+1}$$
$$5^{-12} = 5^{2+(-n+1)}$$
$$5^{-12} = 5^{-n+3}$$

Dado que las expresiones en ambos lados de la ecuación tienen bases iguales, podemos igualar los exponentes para despejar por la variable n:

$$-12 = -n + 3$$

La solución es $n = 15$.

La opción correcta es la (E).

6

El valor de $\sum_{n=0}^{4}\left(\frac{n+1}{n!}+4\right)$ es

A) $\frac{283}{8}$

B) $\frac{203}{8}$

C) $\frac{171}{8}$

D) $\frac{75}{8}$

E) no definido.

Solución:

La sumatoria de una suma es la suma de las sumatorias, de modo que:

$$\sum_{n=0}^{4}\left(\frac{n+1}{n!}+4\right)=\sum_{n=0}^{4}\left(\frac{n+1}{n!}\right)+\sum_{n=0}^{4}(4)$$

Hallemos el valor de la primera de estas últimas dos sumatorias:

$$\sum_{n=0}^{4}\left(\frac{n+1}{n!}\right)=\frac{0+1}{0!}+\frac{1+1}{1!}+\frac{2+1}{2!}+\frac{3+1}{3!}+\frac{4+1}{4!}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{2\cdot 1}+\frac{4}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=1+2+\frac{3}{2}+\frac{4}{6}+\frac{5}{24}$$

$$=1+2+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{24}$$

$$=\frac{24+48+36+16+5}{24}$$

$$=\frac{129}{24}$$

$$=\frac{43}{8}$$

Ahora, determinamos el valor de la segunda sumatoria:

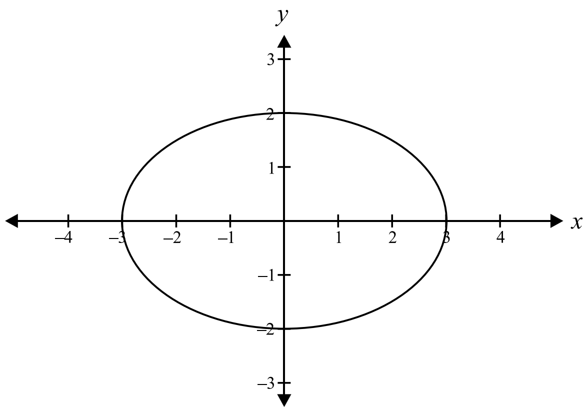
$$\sum_{n=0}^{4}(4)=4+4+4+4+4=4(5)=20$$

Finalmente,

$$\sum_{n=0}^{4}\left(\frac{n+1}{n!}+4\right)=\frac{43}{8}+20=\frac{43+160}{8}=\frac{203}{8}$$

La opción correcta es la (B).

7



¿Cuál de las siguientes representa la ecuación de la gráfica que se ilustra en la figura anterior?

A) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

B) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

C) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 0$

D) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

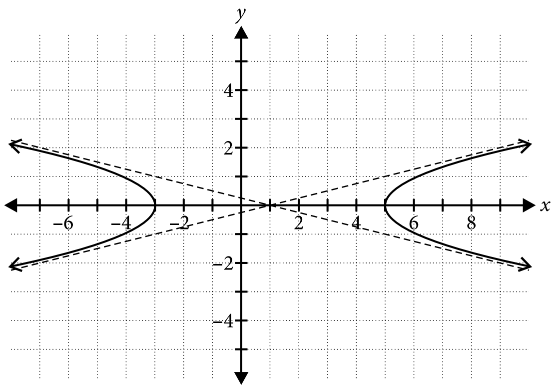
E) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Solución:

La ecuación de una elipse con centro en el origen como la que se muestra, cuyo eje mayor está en el eje de x, y cuyo eje menor está en el eje de y es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ donde $2a$ es la longitud del eje mayor y $2b$ es la longitud del eje menor. A las longitudes a y b se les denomina el semieje mayor y el semieje menor, respectivamente, donde $a > b > 0$. En la figura dada, $a = 3$ y $b = 2$. Por lo tanto, su ecuación es $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$.

La opción correcta es la (B).

8



La ecuación de la hipérbola cuya gráfica aparece en la figura anterior es

A) $16(x-1)^2 - y^2 = 16$

B) $16(x-1)^2 + y^2 = 16$

C) $(x-1)^2 - 16y^2 = 16$

D) $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$

E) $(x-1)^2 - 4y^2 = 4$

Solución:

La ecuación de una hipérbola con centro en (h, k), como la que se muestra, cuyo eje transversal está en el eje de x y cuyo eje conjugado está en el eje de y, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde $2a$ es la longitud del eje transversal y $2b$ es la longitud del eje conjugado. El centro de la hipérbola está en el punto $(1, 0)$. Los vértices, que son los extremos del eje transversal, están en $(-3, 0)$ y $(5, 0)$. De esta información se obtiene que $h = 1$, $k = 0$ y $a = 4$. Para obtener el valor de b, podemos utilizar la ecuación de una de las asíntotas que se muestran. La asíntota creciente pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(5, 1)$; por lo tanto, su pendiente es $\frac{1}{4}$. La pendiente de esta asíntota debe ser $\frac{b}{a}$. Es decir,

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$$

Al sustituir $a = 4$, obtenemos que

$$\frac{b}{4} = \frac{1}{4}$$

y que necesariamente $b = 1$.

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x-1)^2}{4^2} - \frac{(y-0)^2}{1^2} = 1$$

Al simplificar esta ecuación se obtiene:

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1$$

$$(x-1)^2 - 16y^2 = 16$$

La opción correcta es la (C).

9

Determine la ecuación de la parábola con vértice en (1, 2) y foco en (–2, 2).

A) $(x - 1)^2 = 12(y - 2)$

B) $(x - 1)^2 = -12(y - 2)$

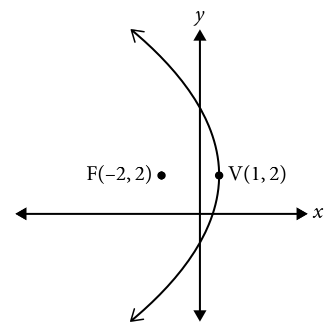
C) $(y - 2)^2 = 12(x - 1)$

D) $(y - 2)^2 = -12(x - 1)$

E) $(y - 3)^2 = 12(x + 2)$

Solución:

Debido a la localización relativa del vértice y el foco, se concluye que la parábola tiene su eje de simetría paralelo al eje de x y que es cóncava hacia la izquierda, según se muestra en la siguiente figura:



La ecuación de una parábola con el eje horizontal es

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

donde (h, k) son las coordenadas del vértice. La cantidad $|p|$ representa la distancia entre el vértice y el foco; si $p > 0$ la parábola abre (o es cóncava) hacia la derecha pero si $p < 0$ la parábola abre a la izquierda. De esta información se obtiene que $h = 1$, $k = 2$ y $|p| = 3$. Dado que $|p| = 3$, se sabe que $p = \pm 3$. Como la parábola abre hacia la izquierda se concluye que $p = -3$. Al sustituir estos valores en la fórmula, se obtiene que

$(y - 2)^2 = 4(-3)(x - 1)$
$(y - 2)^2 = -12(x - 1)$

La opción correcta es la (D).

10

Hace 8 años la edad de Pedro era 6 años más que el triple de la edad que tenía su primo Edgardo. Actualmente la suma de sus edades es 62. Determine la edad actual de Edgardo.

A) 10

B) 12

C) 18

D) 36

E) 44

Solución:

Si P y E representan las edades actuales, en años, de Pedro y Edgardo respectivamente, entonces hace 8 años Pedro tenía $P - 8$ años y su primo tenía $E - 8$ años. Con esta información y la que se da en el ejercicio se puede construir el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables:

$$\begin{cases} P - 8 = 6 + 3(E - 8) \\ P + E = 62 \end{cases}$$

De la segunda ecuación sabemos que $P = 62 - E$. Usando el método de sustitución, se obtiene que

$$(62 - E) - 8 = 6 + 3(E - 8)$$
$$62 - E - 8 = 6 + 3E - 24$$
$$54 - E = 3E - 18$$
$$72 = 4E$$
$$18 = E$$

A manera de verificación, si la edad actual de Edgardo es 18, hace 8 años tenía 10. Dado que $P = 62 - E$, entonces la edad actual de Pedro es $62 - 18 = 44$ años y hace 8 tenía 36. Finalmente, 36 (la edad de Pedro hace 8 años) es 6 más que 30, el triple de 10 (la edad de Edgardo en ese momento).

La opción correcta es la (C).

11

Si (a, b, c) es la solución del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ -2x + y - z = -5, \\ 3x + 2y + 5z = 11 \end{cases}$$

halle el valor de $a + b + c$.

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

Solución:

Utilicemos el método de reducción de matrices. Primero escribimos la matriz aumentada que consiste de los coeficientes de las tres variables (en las primeras columnas) y de una columna adicional con los valores constantes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{array}\right]$$

El primer paso, de obtener un 1 en el elemento que se encuentra en la primera fila y primera columna, ya está hecho; ese número 1 se llama el **pivote** de la primera fila. El próximo paso es obtener un 0 justo debajo de ese pivote; esto se logra multiplicando la primera fila por 2, sumándola a la segunda fila y escribiendo los resultados en la segunda fila. Esto se puede denotar por $2F_1 + F_2 \rightarrow F_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{array}\right]$$

Ahora procedemos a obtener un 0 en la última posición de la primera columna, donde está el 3. Para ello multipliquemos la primera fila por -3 y sumémosla a la tercera fila, escribiendo los resultados en la tercera fila ($-3F_1 + F_3 \rightarrow F_3$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

El próximo paso es obtener el pivote de la segunda fila, es decir, un 1 en el elemento que se encuentra en la segunda fila y la segunda columna. Hay varias maneras para hacer esto. Una de ellas, tal vez la más obvia, es multiplicar todos los elementos de la segunda fila por la fracción $-\frac{1}{3}$, es decir dividir por -3. Sin embargo, al hacer esto estamos induciendo

el uso de fracciones. Para evitar esto, hagamos los siguientes pasos: primero, intercambiemos la segunda y tercera filas, obtenemos un -1 en la posición del pivote al sumar 3 veces la tercera fila a la segunda fila y escribir los resultados en la segunda fila. Luego, multipliquemos la nueva segunda fila por -1. Así pues, tenemos:

Continúa

$$(F_2 \leftrightarrow F_3) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$(3F_3 + F_2 \rightarrow F_2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 11 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$(-F_2 \rightarrow F_2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Ahora que tenemos el pivote de la segunda fila, lo usamos para obtener 0 debajo de él, donde está el –3. Para esto, multipliquemos la segunda fila por 3, sumemos el resultado a la tercera fila y reemplacemos la tercera fila con los resultados:

$$(3F_2 + F_3 \rightarrow F_3) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -14 & -28 \end{array}\right]$$

Finalmente, obtengamos el pivote de la tercera fila, donde está el –14, efectuando la operación elemental $-\frac{1}{14}F_3 \rightarrow F_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad (*)$$

En esta etapa, hay dos técnicas que podemos utilizar para resolver el sistema lineal: el método de reducción de Gauss o el de Gauss-Jordan. El primero tiende a ser más eficiente y consiste en convertir la última matriz aumentada en un sistema lineal triangular y sustituir hacia atrás los valores sucesivos de las variables, empezando con el de z y terminando con el de x:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ \quad y - 5z = -11 \\ \qquad z = 2 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $z = 2$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación resulta que $y = -1$. Al sustituir los valores hallados en la primera ecuación, se obtiene que $x = 1$. La solución del sistema es el punto $(a, b, c) = (1, -1, 2)$.

Por otro lado, el método Gauss-Jordan impone seguir con la reducción de la matriz para que esté en lo que se denomina la forma escalonada reducida, que implica que la matriz tenga no solo los ceros (0) debajo de los pivotes en la diagonal sino también ceros encima de la diagonal. Retomemos el procedimiento desde la última matriz, rotulada con (*):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Los próximos dos pasos son obtener 0 donde está el –5 y otro 0 en el 1 que se encuentra encima del –5 (en la primera fila, tercera columna), según se indica a continuación:

$$(5F_3 + F_2 \rightarrow F_2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$(-F_3 + F_1 \rightarrow F_1) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

El paso final del método Gauss-Jordan es obtener cero (0) donde se encuentra el –2, encima del pivote de la segunda fila. La operación que usaremos es:

$$(2F_2 + F_1 \rightarrow F_1) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Observe que a la izquierda tenemos la matriz identidad y la solución está dada por la columna de la derecha. Al igual que con el método de Gauss, se obtiene la solución (1, –1, 2), es decir $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$. Se concluye que $a + b + c = 1 + (-1) + 2 = 2$.

NOTA: Los métodos que aquí se han utilizado son eficientes y tienen el beneficio adicional de que funcionan para cualquier tipo de sistema lineal, sea o no consistente (que tiene solución), sea o no independiente (una sola solución), sea cuadrado (igual número de variables que de ecuaciones) o no. Hay otros métodos que se pueden considerar para resolver un sistema como este. El hecho de que en este ejercicio el sistema sea consistente independiente implica que la regla de Cramer y el método de la matriz inversa se pueden utilizar exitosamente; de lo contrario, estos últimos métodos mencionados no son viables.

La opción correcta es la (E).

12

Si el sistema lineal

$$\begin{cases} ax + 2y + \ \ z = 2 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ cx + ay + bz = a \end{cases}$$

tiene solución, se puede concluir que el valor de y

A) es un número positivo.

B) es un número negativo.

C) es cero.

D) es cualquier número real.

E) no se puede determinar.

Solución:

El sistema dado es uno de 3 ecuaciones lineales en las 3 variables x, y, z. Aunque podemos resolverlo usando el método de sustitución o el de eliminación o reducción de matrices (Gauss o Gauss-Jordan), o incluso el de la matriz inversa, es más aconsejable en este caso usar la regla de Cramer. La razón para esto es que esta regla permite hallar solamente el valor de una variable sin necesidad de hallar los valores de las demás. Para el sistema dado:

$$\begin{cases} ax + 2y + \ \ z = 2 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ cx + ay + bz = a \end{cases}$$

primero escribimos, pero no evaluamos, el determinante D de la matriz de coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

El próximo paso es calcular el determinante D_y en el que se sustituye la segunda columna de D (la que contiene los coeficientes de y en las tres ecuaciones) por los respectivos valores constantes que aparecen en el lado derecho en cada una de las tres ecuaciones. Observe que estos tres valores constantes son idénticos a los coeficientes de y; por lo tanto, se obtiene el mismo determinante:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Finalmente, hallamos el valor de y:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ c & a & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ c & a & b \end{vmatrix}} = 1$$

La opción correcta es la (A).

13

Encuentre la matriz A si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $AC = B$.

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Solución:

Primero, hallaremos el producto AC. Dado que el tamaño de A es 2×2 y el de B también, el resultado de esta multiplicación es una matriz 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b & b \\ c + 2d & d \end{bmatrix}$$

Dado que $AC = B$, entonces

$$\begin{bmatrix} a + 2b & b \\ c + 2d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

De la anterior ecuación matricial se obtiene un sistema lineal de 4 ecuaciones en 4 variables:

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ b = 2 \\ c + 2d = 6 \\ d = 3 \end{cases}$$

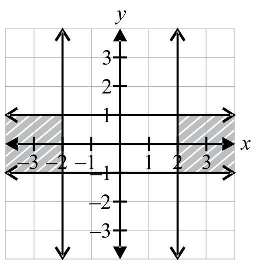
Es un sistema muy fácil de resolver. Se obtiene que $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 3$.

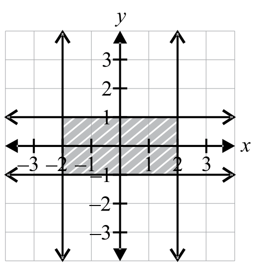
La opción correcta es la (C).

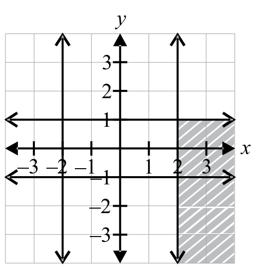
14

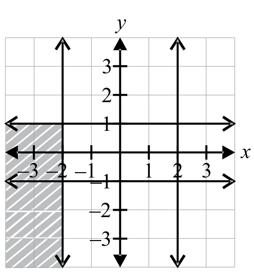
La gráfica del conjunto solución del sistema

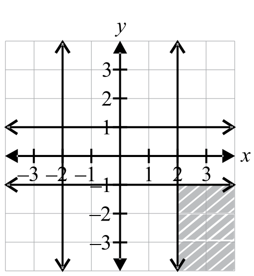
$$\begin{cases} |x| \geq 2 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$$ es

A) 

B) 

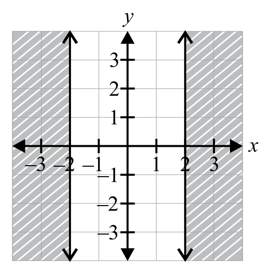
C) 

D) 

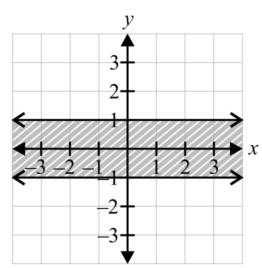
E) 

Solución:

La gráfica de un sistema de inecuaciones, lineales o no lineales, en las dos variables x, y es una región en el plano cartesiano compuesta por todos los puntos (x, y) que satisfacen todas las inecuaciones del sistema. En este caso, la inecuación $|x| \geq 2$ se puede reescribir como $x \geq 2$ o $x \leq -2$. La gráfica de $x = 2$ es una recta vertical; por ende, la gráfica de $x \geq 2$ es la región que queda a la derecha de esa recta. De manera similar, la gráfica de $x \leq -2$ es la región que queda a la izquierda de la recta vertical $x = -2$. Por lo tanto, la solución de $|x| \geq 2$ puede ser representada por las dos franjas verticales que se muestran sombreadas a continuación:



De manera similar, la inecuación $|y| \leq 1$ se puede reescribir como $-1 \leq y \leq 1$. La gráfica es la región entre las rectas horizontales $y = -1$ y $y = 1$, según se muestra en la siguiente figura:

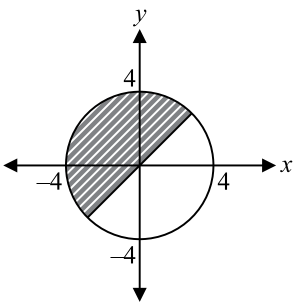


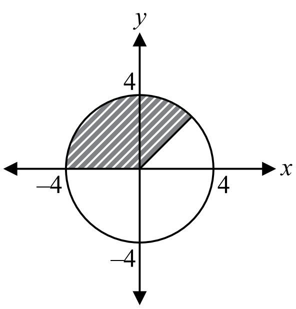
La gráfica del conjunto solución del sistema de inecuaciones dado se compone de las regiones comunes en las dos gráficas que se muestran arriba, es decir las porciones que están sombreadas en ambas.

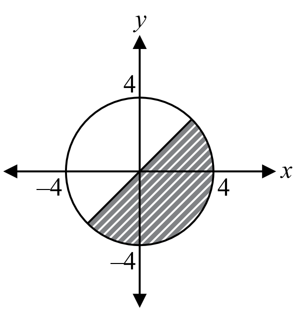
La opción correcta es la (A).

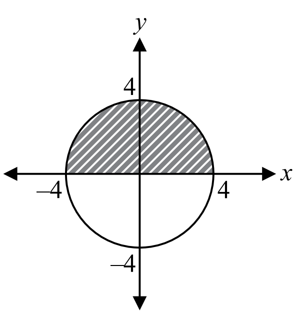
15

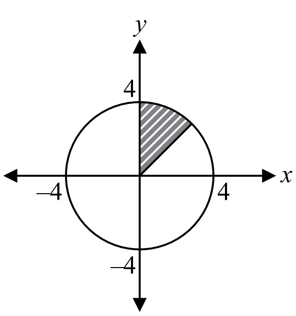
El terreno circular de una finca se puede describir con la inecuación $x^2 + y^2 \leq 16$. El dueño de la finca colocará gallinas en aquella parte de la finca que está en la región $y \geq x$ tal que $y \geq 0$. ¿Cuál es la región donde irán las gallinas?

A)


B)


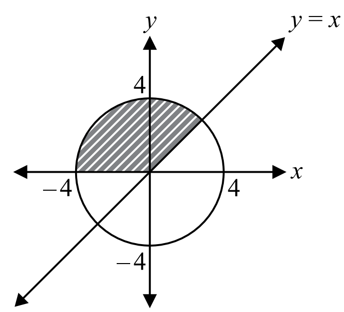
C)


D)


E)


Solución:

La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 16$ es el círculo de radio 4 centrado en el origen. La gráfica de $x^2 + y^2 \leq 16$ es el disco circular de radio 4 centrado en el origen, es decir, el círculo propiamente y todo lo que está en el interior del mismo. La gráfica $y \geq x$ es toda la región del plano cartesiano que se encuentra encima de la recta $y = x$. La gráfica de $y \geq 0$ es la región que se encuentra encima de la recta $y = 0$, que es el eje de x. La región donde irán las gallinas es la que está en el disco circular, sobre el eje de x, encima de la recta $y = x$.



La opción correcta es la (B).

16

Halle los valores de y que satisfacen

$$\begin{cases} y = 4^{x+3} \\ y - 2^{x^2+3x} = 0 \end{cases}.$$

A) −3, 1
B) −3, 2
C) −3, 256
D) 1, 1024
E) 2, 1024

Solución:

Para resolver este sistema de dos ecuaciones NO lineales en dos variables, utilizaremos el método de sustitución. Al sustituir el valor de y de la primera ecuación en la segunda, se obtiene la siguiente ecuación exponencial en la variable x:

$$4^{x+3} - 2^{x^2+3x} = 0$$

la cual es equivalente a

$$4^{x+3} = 2^{x^2+3x}$$

Para poder resolver la ecuación anterior, cambiaremos la base 4 como una potencia de 2 para que las bases de ambos términos sean iguales.

$$(2^2)^{x+3} = 2^{x^2+3x}$$

Al aplicar las reglas de exponentes se obtiene

$$2^{2(x+3)} = 2^{x^2+3x}$$
$$2^{2x+6} = 2^{x^2+3x}$$

Tomando el logaritmo de base 2, que es la inversa de la función exponencial de base 2, a ambos lados de la ecuación, se consigue la siguiente ecuación cuadrática. (Dado que las bases son iguales, esto es equivalente a igualar los exponentes de ambas expresiones.)

$$2x + 6 = x^2 + 3x$$

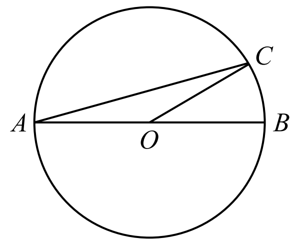
Finalmente, se resuelve la ecuación cuadrática:

$$0 = x^2 + x - 6$$
$$0 = (x + 3)(x - 2)$$
$$x = -3, x = 2$$

Podemos usar ahora una de las ecuaciones originales para hallar los valores de y. Por ser un poco más sencilla, utilizaremos la primera: $y = 4^{x+3}$. Cuando $x = -3$, el valor de y es $y = 4^{-3+3} = 4^0 = 1$. Cuando $x = 2$, el valor de y es $y = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$.

La opción correcta es la (D).

17



En la figura anterior se muestra un círculo unitario con centro O y diámetro AB. Si el arco BC mide $\frac{\pi}{6}$ metros, determine la longitud de la cuerda AC, en metros.

A) $\sqrt{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

B) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

C) $\sqrt{1+\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

E) $\sqrt{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Solución:

Según la premisa, el círculo es unitario, o sea tiene radio $r = 1$. La medida del arco BC es $s = \frac{\pi}{6}$. Si θ es el ángulo central BOC que subtiende el arco BC, podemos usar la fórmula $s = r\theta$ para hallar la medida, en radianes, de dicho ángulo:

$$s = r\theta$$

$$\frac{\pi}{6} = (1)\theta$$

$$\frac{\pi}{6} = \theta$$

Dado que la medida del ángulo BOC es $\frac{\pi}{6}$ radianes, su ángulo suplementario AOC mide $\frac{5\pi}{6}$ radianes.

Para determinar la medida de la cuerda AC usaremos la ley de cosenos en el triángulo AOC con $a = OA = 1$ y $c = OC = 1$ (porque OA y OC son radios del círculo), $b = AC$ y $\beta = AOC = \frac{5\pi}{6}$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$b^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$b^2 = 1 + 1 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$b^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

La opción correcta es la (D).

18

¿Cuál de las siguientes es una solución de la ecuación $\cos 2x = -1$?

A) $x = \dfrac{\pi}{4}$

B) $x = \dfrac{\pi}{2}$

C) $x = \dfrac{3\pi}{4}$

D) $x = \pi$

E) $x = 2\pi$

Solución:

Sabemos que en el intervalo $[0, 2\pi)$ solo coseno de π es igual *a* -1. Es decir, solo cuando $2x = \pi$, $\cos(2x) = -1$. Como la función coseno tiene periodo 2π, los valores de coseno se repiten cada 2π unidades. Esto es, $\cos(2x) = -1 = \cos(\pi + 2\pi k)$, para cualquier entero k.

Ahora resolvemos para la variable x:

$2x = \pi + 2\pi k$, para cualquier entero k (en otras palabras, k puede ser $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$)

Al dividir por 2 ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

Observe que, en particular, cuando $k = 0$, se tiene que

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

La opción correcta es la (B).

19

Halle el valor de $\text{sen}(2\tan^{-1} 4)$.

A) $\dfrac{2}{17}$

B) $\dfrac{4}{17}$

C) $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

D) $\dfrac{8}{17}$

E) $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

Solución:

Observemos que si $\theta = \tan^{-1} 4$, entonces $\tan\theta = 4$, donde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Como el valor de la tangente es positivo, podemos asumir que θ es un ángulo agudo. La expresión cuyo valor queremos determinar se puede reescribir como $\text{sen}(2\theta)$. Utilicemos ahora la fórmula de doble ángulo para expresarla de la siguiente manera:

$$\text{sen}(2\theta) = 2\ \text{sen}\ \theta \cos\theta$$

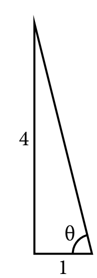
Podemos construir un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. En un triángulo rectángulo, la tangente de uno de los ángulos agudos es igual al cociente de las medidas del lado opuesto y el lado adyacente:

$$\tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

Por lo tanto, dado que

$$\tan\theta = 4 = \frac{4}{1}$$

nuestro triángulo luce de la siguiente manera:



Por el teorema de Pitágoras, se concluye que la hipotenusa mide $\sqrt{17}$. De aquí obtenemos:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Sustituyendo en la fórmula de doble ángulo arriba mencionada, se obtiene:

$$\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}\ \theta \cos\theta = 2\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{8}{17}$$

La opción correcta es la (D).

20

Las soluciones de la ecuación $3\tan^2 x - \sec^2 x - 5 = 0$ están dadas por

A) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

B) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k;\ x = \frac{2\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

C) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

D) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

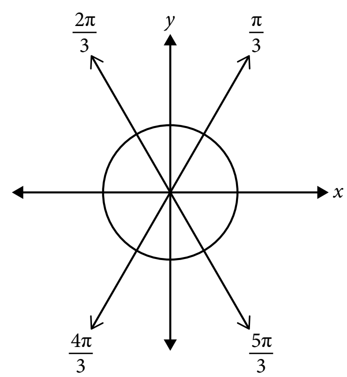
E) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

Solución:

Usemos la identidad pitagórica $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ para reescribir $\sec^2 x$ en términos de $\tan^2 x$, y luego simplifiquemos:

$$3\tan^2 x - (\tan^2 x + 1) - 5 = 0$$
$$3\tan^2 x - \tan^2 x - 1 - 5 = 0$$
$$2\tan^2 x - 6 = 0$$
$$2\tan^2 x = 6$$
$$\tan^2 x = 3$$
$$\tan x = \pm\sqrt{3}$$

Las soluciones de $\tan x = \sqrt{3}$ están en los cuadrantes I y III. Las soluciones de $\tan x = -\sqrt{3}$ están en los cuadrantes II y IV. Si k representa cualquier número entero $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, las soluciones de la primera son $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ y $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$. De igual forma, las soluciones de $\tan x = -\sqrt{3}$ son $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ y $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$. Por lo tanto, las soluciones son todos los ángulos coterminales con $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$, según se muestra en la siguiente figura:



Notemos que si a $\frac{\pi}{3}$ le sumamos π, obtenemos $\frac{4\pi}{3}$; o sea, cualquier solución de la forma $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$ se puede obtener de la expresión más sencilla $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$. Lo mismo sucede con $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$. Si $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros, entonces las soluciones de la ecuación original se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = \frac{2\pi}{3} + \pi k \end{cases} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}$$

La opción correcta es la (B).

21

Si $\sec\theta = a$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) =$

A) $\sqrt{\frac{1-a}{2}}$

B) $\sqrt{\frac{a-1}{2a}}$

C) $\sqrt{\frac{a+1}{2a}}$

D) $\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}$

E) $\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}$

Solución:

Dado que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, se concluye que el ángulo θ está en el primer cuadrante, lo que implica que los valores de todas sus funciones trigonométricas son positivos.

Si $\sec\theta = a$, entonces $\cos\theta = \frac{1}{a}$. Para determinar el valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, usaremos la fórmula de ángulo medio (o semiángulo) para seno:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

donde el signo depende del cuadrante en el que se encuentra $\frac{\theta}{2}$. Al sustituir $\cos\theta = \frac{1}{a}$ en la fórmula y simplificar, obtenemos lo siguiente:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{a}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\frac{a-1}{a}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{a-1}{a}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{a-1}{2a}}$$

Como sabemos que el ángulo θ está en el primer cuadrante, el ángulo $\frac{\theta}{2}$ también lo está.

La opción correcta es la (B).

22

Halle el valor de $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

A) $-\frac{\pi}{2}$

B) -1

C) 0

D) 1

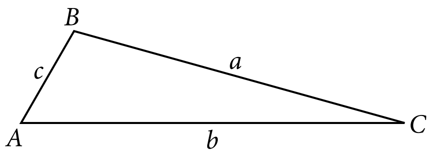
E) $\frac{\pi}{2}$

Solución:

El valor de $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ es -1. Eso implica que hay que evaluar la expresión $\text{sen}^{-1}(-1)$. Hay que recordar que el dominio de la función seno inverso es el intervalo $[-1, 1]$ y su campo de valores (o alcance) es el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Eso quiere decir que, de todos los ángulos que tienen su seno igual a -1, hay que seleccionar el que esté en este último intervalo de valores. Por lo tanto, $\text{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

La opción correcta es la (A).

23



En el triángulo ABC que se muestra en la figura anterior, $\cos A = \frac{1}{2}$, $\cos B = -\frac{1}{4}$, $a = 6$. Encuentre el valor de b.

A) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

B) $\frac{3}{2}\sqrt{15}$

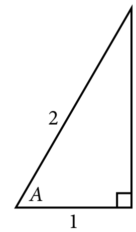
C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

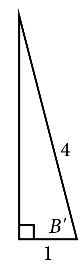
E) $3\sqrt{5}$

Solución:

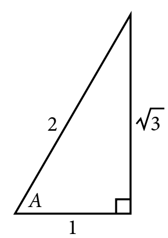
Primero determinaremos los valores de sen A y sen B. Una manera de hacer esto es construir dos triángulos rectángulos, el primero de los cuales tiene el ángulo A como uno de sus ángulos agudos.



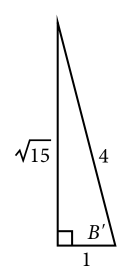
Dado que B es un ángulo obtuso, el segundo triángulo rectángulo tendrá como uno de sus ángulos a B', el ángulo de referencia de B. (Nota: Los triángulos no usan necesariamente las mismas escalas.)



Con la información suministrada y aplicando el Teorema de Pitágoras, obtenemos las medidas de los otros lados de ambos triángulos. El primero se muestra a continuación:



El segundo triángulo luce de la siguiente forma:



Continúa

Si θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$. De los dos triángulos anteriores, podemos deducir que $\operatorname{sen} A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y que, como B es un ángulo menor de 180°, $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} B' = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

NOTA: Los valores de sen A y sen B también se pueden conseguir de la siguiente manera.

Recordemos la identidad pitagórica básica: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Al usar esta fórmula para $\theta = A$, sustituyendo el dato $\cos A = \dfrac{1}{2}$:

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 A + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Simplificando esta ecuación se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2 A + \frac{1}{4} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen} A = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dado que A es un ángulo agudo, sabemos que $\operatorname{sen} A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. De la misma forma podemos determinar que $\operatorname{sen} B = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Dado que B es un ángulo obtuso ($90° < B < 180°$), es decir, el lado terminal del ángulo en posición estándar está en el segundo cuadrante, entonces $\operatorname{sen} B = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. El próximo paso es utilizar la ley de senos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

y sustituir el valor $a = 6$, suministrado en la premisa, y los valores $\operatorname{sen} A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen} B = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ hallados anteriormente:

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Finalmente, despejamos para determinar el valor de b:

$$b = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$b = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{15}}{4\sqrt{3}} = 3\sqrt{5}$$

La opción correcta es la (E).

24

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación sen $2x - \cos x = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Solución:

Resolver la ecuación trigonométrica dada en el intervalo $[0, 2\pi)$ significa hallar todas sus soluciones (los ángulos en posición estándar x que la satisfacen) dentro de la primera vuelta al círculo unitario en contra de las manecillas del reloj. Para hacer esto, utilizaremos primero la fórmula de doble ángulo para seno:

$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$

Sustituimos esta fórmula en la ecuación original para obtener:

$2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$

Al factorizar, se obtiene:

$\cos x(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$

Ahora hay que resolver las dos ecuaciones $\cos x = 0$ y $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$, es decir $\cos x = 0$ y $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$. La primera de estas dos ecuaciones tiene dos (2) soluciones en el intervalo al que estamos restringidos: $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. En ese mismo intervalo, la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ también tiene dos (2) soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el segundo cuadrante; estas son $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$.

La opción correcta es la (E).

25

El conjunto solución de la ecuación
$2 - 2\cos^2 x = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, 2\pi)$ es

A) $\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}$

B) $\left\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

D) $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$

E) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Solución:

Para hallar el conjunto solución de la ecuación trigonométrica dada utilizaremos la identidad pitagórica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, de la que se obtiene $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Se sustituye esta expresión para reescribir la ecuación original en términos de $\operatorname{sen} x$ solamente:

$2 - 2\cos^2 x = \operatorname{sen} x$

$2 - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen} x$

Luego, simplificamos y factorizamos la ecuación resultante:

$2 - 2 + 2\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

$2\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

$2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

$\operatorname{sen} x(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$

Debido a la propiedad multiplicativa del cero, lo anterior necesariamente implica que $\operatorname{sen} x = 0$ o que $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$. Esta última ecuación es equivalente a $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Las soluciones de $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ en $[0, 2\pi)$ son $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

Las soluciones de $\operatorname{sen} x = 0$ en $[0, 2\pi)$ son $x = 0$, $x = \pi$.

La opción correcta es la (A).

NOTAS

CollegeBoard

CollegeBoard